Řešení DU 5b

středa 28. dubna 2021 6:56

Řešíme rovnici $y''' + y'' + 9y' + 9y = 9x^2 + 50xe^{-x}$

Charakteristický polynom homogenní rovnice je

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda + 9 = (\lambda+1)(\lambda^2+9) = (\lambda+1)(\lambda-3i)(\lambda+3i)$$

Tedy $FS = \{e^{-x}, \sin 3x, \cos 3x\}$

Pravá strana je součtem dvou pravých stran ve speciálním tvaru budeme tedy (metodou speciální pravé strany) řešit dvě rovnice

$$y''' + y'' + 9y' + 9y = 9x^2 \quad (*)$$

$$y''' + y'' + 9y' + 9y = 50xe^{-x} \quad (*)$$

Pro rovnici $(*)$ hledáme řešení ve tvaru $y_p = Ax^2 + Bx + C$

To dává $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$, $y_p''' = 0$

a dosazením do $(*)$ dostaneme

$$2A + 18Ax + 9B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 9x^2$$

Což dává soustavu $9A = 9$, $18A + 9B = 0$, $2A + 9B + 9C = 0$,

která má řešení $A = 1$, $B = -2A = -2$, $C = -B - \frac{2}{9}A = \frac{16}{9}$

Řešení rovnice $(*)$ hledáme ve tvaru $y_q = x(Ax+B)e^{-x}$

násobnost kořene 1

Máme tedy

$$y_q' = (2Ax+B)e^{-x} - (Ax^2+Bx)e^{-x}$$

$$= (-Ax^2 + (2A-B)x + B)e^{-x}$$

$$y_q'' = (-2Ax+2A-B)e^{-x} - (-Ax^2+(2A-B)x+B)e^{-x}$$
$$= (Ax^2+(-4A+B)x+2A-2B)e^{-x}$$
$$y_q''' = (2Ax-4A+B)e^{-x} - (Ax^2+(-4A+B)x+2A-2B)e^{-x}$$
$$= (-Ax^2+(6A-B)x-6A+3B)$$

Po dosazení do (X) dostáváme (po pokrácení e^{-x})

$$(-Ax^2+(6A-B)x-6A+3B+Ax^2+(-4A+B)x+2A-2B-9Ax^2+9(2A-B)x+9B+9Ax^2+9Bx) = 50x$$

Tedy
$$6A-B-4A+B+18A-9B+9B=50 \rightarrow A=\frac{5}{2}$$
$$-6A+3B+2A-2B+9B=0 \rightarrow B=\frac{2}{5}A=1$$

Obecné řešení původní rovnice má tedy tvar

$$y = Ce^{-x}+D\sin 3x+E\cos 3x+x^2-2x+\frac{16}{9}+\left(\frac{5}{2}x^2+x\right)e^{-x}$$